MINISTERE DE L'INDUSTRIE, DES P. ET T. ET DU TOURISME

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES D'ALES

CONCOURS D'ADMISSION 1988

(Temps accordé : 4 heures)

MATHEMATIQUES

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

N.B : Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.

Les règles à calcul, tables de logarithmes et tables trigonométriques sans formulaire, ainsi que les calculatrices électroniques portatives autonomes non imprimantes sont autorisées.

Toute autre documentation est interdite.

PROBLEME 1

Ce problème comprend 2 parties.

PARTIE I

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

f est la fonction définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = L,\ L \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(C) désigne la courbe représentative de f.

1- Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

En déduire L pour que f soit continue en 0; désormais on prendra L égal à la valeur trouvée.

Démontrer que f est dérivable en 0 ; préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

2- Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$. Donner le tableau de variations de f.

3- Etudier les asymptotes éventuelles de (C) et préciser la position de (C) par rapport à ces asymptotes. Tracer (C).

4- On considère l'équation différentielle (E) : $(\operatorname{ch}x - 1)y' + y\operatorname{sh}x = x\operatorname{sh}x$

a) Résoudre (E) sur chacun des intervalles : $I_1 =]-\infty ; 0[$; $I_2 =]0 ; +\infty[$

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

PARTIE II

1- Soit g une fonction continue sur $[0 ; +\infty[$.

Etablir les deux résultats suivants qui pourront être utilisés par la suite.

a) Il existe une fonction u unique, définie sur $[0 ; +\infty[$, admettant des dérivées première et seconde, telle que : $u'' = g$; $u(0) = 0$; $u'(0) = 0$

b) Si : $g(x) = ax^n + x^n \varepsilon_1(x)$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to 0^+} \varepsilon_1(x) = 0$

Alors : $\int_0^x g(t)dt = \dfrac{a}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \varepsilon_2(x)$, $\lim_{x \to 0^+} \varepsilon_2(x) = 0$

2- Soit g une fonction continue sur $[0 ; +\infty[$ et strictement positive sur $]0 ; +\infty[$;

on associe à g la fonction G définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} G(x) = \dfrac{\int_0^x t\,g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)dt} & \text{si } x > 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

a) Justifier que G est effectivement définie sur $[0 ; +\infty[$.

b) En appliquant à g le résultat de la question 1 a), établir pour $x \in]0 ; +\infty[$ la relation : $G(x) = \dfrac{xu'(x) - u(x)}{u'(x)}$

c) Etablir pour $x > 0$: $0 < G(x) < x$. En déduire la continuité de G sur $[0 ; +\infty[$.

d) Démontrer que G est dérivable et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

e) Démontrer que si g vérifie la condition (b) de la question 1, alors G est dérivable à droite en 0 ; préciser son nombre dérivé.

3- Déterminer une fonction g telle que la fonction G qui lui est associée soit la restriction à $[0 ; +\infty[$ de la fonction f étudiée dans la partie I.

4- On suppose que g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \operatorname{Arctan}(x+1)$

Déterminer G. Quel est le nombre dérivé de G à droite en 0 ?

5- Déterminer l'ensemble des fonctions g définies continues sur $[0 ; +\infty[$, strictement positives sur $]0 ; +\infty[$ auxquelles est associée la fonction G définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $G(x) = \dfrac{3}{4} x$

TSVP.

PROBLEME 2 Ce problème comprend deux parties.

Préliminaires n désigne un entier naturel non nul.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

I_n désigne la matrice identité d'ordre n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. O_n désigne la matrice nulle d'ordre n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée X et à coefficients réels.

Pour M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on note P(M) la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par: $P(M) = \sum_{k=0}^{m} a_k M^k$ avec $M^0 = I_n$.

On admettra que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique polynôme, appelé polynôme minimal de M, noté $P_M(X)$, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(I) le coefficient a_m du terme de plus haut degré est égal à 1

(II) $P_M(M) = O_n$

(III) $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $(Q(M) = O_n) \Rightarrow (P_M \text{ divise } Q)$.

L'objet de ce problème est de déterminer les polynômes minimaux de matrices particulières.

PARTIE I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1- a) Déterminer la matrice N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = 2I_3 + N$; calculer N^2 et N^3.

En déduire le polynôme minimal de A.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ calculer A^k.

2- a) Si P est un élément de $\mathbb{R}[X]$ démontrer que : $P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & 4P'(2) & 6P''(2) \\ 0 & P(2) & 3P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}$

où P' et P'' désignent les polynômes dérivés d'ordre 1 et 2 de P.

b) Retrouver le polynôme minimal de A.

PARTIE II Soit M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on lui associe la matrice $R_k(M)$ à k lignes et n^2 colonnes formée ainsi :

La 1ère ligne est la matrice I_n écrite en ligne (c'est-à-dire les lignes à la suite les unes des autres) ;

La i-ème ligne, $2 \leq i \leq k$, est la matrice M^{i-1} écrite en ligne.

En utiisant la méthode du pivot de GAUSS ou en effectuant des combinaisons linéaires sur les lignes de $R_k(M)$, on associe à $R_k(M)$ une matrice notée $L_k(M)$ telle que :

$L_k(M) = (a_{ij})$; $1 \leq i \leq k$; $1 \leq j \leq n^2$ avec $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

1- Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

a) calculer B^2, écrire $R_3(B)$ et déterminer une matrice $L_3(B)$.

b) A partir de $L_3(B)$ déterminer une combinaison linéaire nulle des matrices B^2, B et I_4.

c) Déterminer le polynôme minimal de B.

2- Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calculer C^2 et C^3, écrire $R_4(C)$ et déterminer une matrice $L_4(C)$.

b) A partir de $L_4(C)$ déterminer une combinaison linéaire nulle des matrices C^3, C^2, C et I_3.

c) Justifier que C^2, C et I_3 sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en déduire le polynôme minimal de C.

3- Soit $D = \begin{pmatrix} B & O_{4,3} \\ O_{3,4} & C \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ où $O_{m,n}$ désigne la matrice nulle à m lignes et n colonnes.

a) Démontrer que :

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(D) = \begin{pmatrix} P(B) & O_{4,3} \\ O_{3,4} & P(C) \end{pmatrix}$

b) Déterminer le polynôme minimal de D.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail